Series

Dada una sucesión $\{a_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{A_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$, es decir:

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,\ A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \dots$$

La sucesión $\{A_n\}$ así definida se llama *serie de término general* a_n o *serie definida por la sucesión* $\{a_n\}$, y la representaremos por $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ o, más sencillamente, $\sum a_n$. El número $\displaystyle A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ se llama *suma parcial de orden* n de la serie $\sum a_n$.

Debe quedar claro desde ahora que ***una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión***. Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, ***los conceptos y resultados vistos para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series***. En particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es "acotada", "convergente" o "positivamente divergente".

Si una serie $\sum a_n$ es convergente se usa el símbolo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para representar el *límite de la serie* que suele llamarse *suma de la serie*. Naturalmente, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es el número definido por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \text{lím}\{A_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

Por tanto, la igualdad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$, hay un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - S\right| < \varepsilon$.

Serie geométrica

Dado un número x, la sucesión $\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$ se llama serie geométrica de razón x. Observa que dicha serie se obtiene sumando consecutivamente los términos de la sucesión $\left\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\right\}$. Es costumbre representar la serie geométrica de razón x con el símbolo $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$. Dicha serie converge si, y sólo si, $|x| < 1$, en cuyo caso se verifica que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,. \tag{1}$$

< > ⋘ ⋙ i ? P

Serie armónica

La serie de término general $1/n$, es decir, la sucesión $\{H_n\}$ donde $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, que simbólicamente representamos por $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, se llama **serie armónica**. Se verifica que la serie armónica diverge positivamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \{1 + 1/2 + \cdots + 1/n\} = +\infty.$$

Serie armónica alternada

Se llama así la serie de término general $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$; es decir, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Se verifica que la serie armónica alternada es convergente y su suma es igual a $\log 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\log 2.$$

La particularidad del estudio de las series

La característica que distingue el estudio de las series es la siguiente: se trata de deducir propiedades de la serie $\{A_n\} = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, a partir del comportamiento de $\{a_n\}$. Es decir, los resultados de la teoría de series dan información sobre la sucesión $\{A_n\}$ haciendo hipótesis sobre la sucesión $\{a_n\}$. La razón de esta forma de proceder es que, por lo general, no se conoce una expresión de $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ que permita hacer su estudio de forma directa; es decir, la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ no es posible "realizarla" en la práctica. Por ello, en el estudio de las series se supone implícitamente que *la sucesión* $\{a_n\}$ *es el dato que podemos utilizar*.

Es importante que te des cuenta de que cambiar un solo término en la sucesión $\{a_n\}$ se traduce en cambiar *infinitos* términos en la serie $\sum a_n$. El siguiente resultado nos dice que si cambiamos un número finito de términos en una sucesión $\{a_n\}$ ello no afecta a la posible convergencia de la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ pero sí afecta a la suma de dicha serie.

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones y supongamos que hay un número $q \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant q + 1$ es $a_n = b_n$. Entonces se verifica que las series $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ y $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ o bien convergen ambas o no converge ninguna, y en el primer caso se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{j=1}^{q} a_j = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{j=1}^{q} b_j .$$

Condición necesaria para la convergencia de una serie

Para que la serie $\sum a_n$ sea convergente es necesario que $\lim\{a_n\} = 0$.

Series de términos positivos

Una serie $\sum a_n$ tal que $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una *serie de términos positivos*. Observa que una serie de términos positivos es una sucesión creciente por lo que o bien es convergente (cuando está mayorada) o es positivamente divergente.

Criterio básico de convergencia

Una serie de términos positivos $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente si, y sólo si, está mayorada, es decir, existe un número $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M$.

Una serie de términos positivos que no está mayorada es (positivamente) divergente.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768)

Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que

$$\lim \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces:

a) Si $L < 1$ la serie $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge.

b) Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ es divergente y $\{a_n\}$ no converge a 0.

Ejercicio.

Estudia la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}$ donde $x \in \mathbb{R}$.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821)

Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim \left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces:

a) Si $L < 1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

b) Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente y $\{a_n\}$ no converge a 0.

Ejercicio

Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{2n^3-2n}$.

Criterio de Raabe (1832)

Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y pongamos $R_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.

i) Si $\{R_n\} \to L$, donde $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

ii) Si $\{R_n\} \to L$, donde $L < 1$ o $L = -\infty$, o bien si existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_n \leqslant 1$ para todo $n \geqslant k$, entonces la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Forma alternativa del criterio de Raabe

Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Pongamos $S_n = \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n$.

i) Si $S_n \to \mathrm{e}^L$ con $L > 1$ o si $S_n \to +\infty$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

ii) Si $S_n \to \mathrm{e}^L$ con $L < 1$ o si $S_n \to 0$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Convergencia absoluta

Se dice que una serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ es convergente.

Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Criterio de Leibniz para series alternadas

Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y convergente a cero. Entonces la serie alternada $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ es convergente. Además, si $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ y $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $|S - S_n| \leqslant a_{n+1}$.

Ejercicio

Estudia, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergencia de la serie:

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^{\alpha}$$

Series de potencias

Dadas una sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ y un número $a\in\mathbb{R}$, se llama **serie de potencias** centrada en a a la sucesión

$$\{c_o + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n\}$$

en la cual x representa a un número real arbitrario. Dicha serie se simboliza por

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n.$$

Un tipo particular de series de potencias son las **series de Taylor**. Dada una función f que tiene derivadas de todo orden en un punto a, la serie de potencias

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se llama serie de Taylor de f en a.

Dada una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$, sea $\lambda = \text{lím} \sqrt[n]{|c_n|}$ y definamos:

$$R = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \lambda = +\infty\,; \\ \dfrac{1}{\lambda}\,, & \text{si } 0 < \lambda < +\infty\,; \\ +\infty\,, & \text{si } \lambda = 0\,. \end{cases}$$

Entonces, si $R=0$ la serie converge sólo para $x=a$; si $0 < R < +\infty$ la serie converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < R$ y no converge para $|x-a| > R$; y si $R = +\infty$ la serie converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Con las notaciones del teorema anterior, el número R se llama el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Una serie de potencias se dice que es trivial si $R = 0$. Para una serie de potencias no trivial, centrada en un punto a, el intervalo $I =]a - R, a + R[$, si $0 < R < +\infty$, o bien la totalidad de $\mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$, cuando $R = +\infty$, se llama **intervalo de convergencia** de la serie; y la función $f : I \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ para todo $x \in I$, se llama **función suma** de la serie.

Dada una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$, supongamos que $c_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y que

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \to \lambda \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces el radio de convergencia R viene dado por $R = 1/\lambda$, cuando $0 < \lambda < +\infty$, $R = 0$ si $\lambda = +\infty$ y $R = +\infty$ si $\lambda = 0$.

Derivación de una serie de potencias

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia no nulo R. Sea I el intervalo de convergencia de la serie y $f : I \to \mathbb{R}$ la función suma de la serie definida para todo $x \in I$ por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Entonces se verifica que:

i) f es indefinidamente derivable en I.

ii) La derivada de orden k de f está dada para todo $x \in I$ por:

$$f^{(k}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}.$$

En particular, se verifica que $f^{(k}(a) = c_k \cdot k!$, es decir, $c_k = \dfrac{f^{(k}(a)}{k!}$ y, por tanto, la serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ coincide con la serie de Taylor en a de su función suma.